Generating function of isoscalar factors of unitary groups

1983 J. Phys. A: Math. Gen. 16 3723

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/16/16/012)

J. Phys. A: Math. Gen. **16** (1983) 3723–3738. Printed in Great Britain

Fonction génératrice des facteurs isoscalaires des groupes unitaires

M Hage Hassan

Institut de Physique Nucléaire (et IN2P3), Université Claude Bernard Lyon I, 43, Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne, Cedex France

Reçu le 7 février 1983, en forme définitive le 1 juin 1983

Résumé. Une nouvelle schématisation des éléments de la base des représentations fondamentales des groupes unitaires a été introduite. A partir de cette schématisation, et à l'aide de deux règles que nous avons établies, nous pouvons déduire par un calcul élémentaire la fonction génératrice de la base de Gel'fand des groupes unitaires et la fonction génératrice des coefficients de couplage de cette base. De cette dernière nous avons construit la fonction génératrice des facteurs isoscalaires de SU(n). Ainsi notre approche donne les expressions algèbriques de ces facteurs dans le cas général, c'est-à-dire quelque soit n. Nous indiquons la méthode de calcul des éléments de la représentation irréductibles du produit direct de N représentations et nous traitons le cas particulier $n = 2$. L'approche que nous développons s'applique, *a priori*, sans difficulté aux autres groupes classiques.

Abstract. In this paper we introduce a new schematisation of the elements of the bases of the fundamental representations of the unitary groups. Using this schematisation, as well as two rules which will be established in this work, we are able to find, by an elementary calculation, the generating function of coupling coefficients of this basis. This last generating function permits us to find the one corresponding to SU(n) isoscalar factors. Our approach gives in the general case, i.e. for every n, the algebraic expressions of these factors. We show how to find the elements of the irreducible representation of the direct product of N representations, and we give the details of this method in the special case $n = 2$. *A priori*, our method can be easily applied to other classical groups.

1. Introduction

Les groupes unitaires SU(n) ont trouvé des applications dans tous les domaines de la physique. Plusieurs méthodes ont été dévéloppées pour l'étude de ces groupes (Bickerstaff *et al* 1982). Cependant les approches proposées, Nagel et Moshinsky (1965) et Louck et Biedenharn (1973), pour la détermination explicite des éléments de la base canonique de Gel'fand et des coefficients de couplage de cette base sont difficilement exploitables pour $n > 3$.

Nous avons proposé une nouvelle approche (Hage Hassan 1983a, b) pour résoudre ces problèmes. Notre approche consiste à construire la fonction génératrice de la base de la représentation de SU(n) et d'en déduire la fonction génératrice des invariants de Weyl (Hage Hassan 1979). Ces fonctions s'expriment à l'aide des éléments de la base des représentations fondamentales, BRF, et des fonctions $\{\phi^{i}_{n}\}$ qui sont des produits des paramètres introduits pour la construction de la fonction génératrice de la base de la représentation de SU(n). De la fonction génératrice des invariants de Weyl, et

† Adresse permanente: Université libanaise, faculté des Sciences, Section I, Hadeth, Beyrouth, Liban.

en utilisant une propriété de la fonction génératrice de SU(n) que nous avons mis en évidence (Hage Hassan 1983b), nous avons construit la fonction génératrice des coefficients de couplage. Le dévéloppement de ces fonctions génératrices donne les éléments de la base de la représentation de SU(n) et les coefficients de couplage.

Du point de vue pratique, il est nécessaire d'écrire les éléments de la BRF dans la notation de Gel'fand pour la détermination des fonctions $\{\phi^i_n\}$. Lorsqu'on utilise la méthode proposée par Gazeau *et al* (1978) pour la détermination de la fonction génératrice des coefficients de couplage, les calculs deviennent inextricables, et même un grand ordinateur (CDC 6600) mettra un temps très long pour effectuer ces calculs dans le cas où $n \geqslant 6$.

Pour résoudre cette difficulté nous avons introduit une nouvelle schématisation de la BRF que nous appelons la représentation binaire, RB. A l'aide de deux règles que nous établissons, nous pouvons déduire de chaque élément de la BRF le ϕ correspondant. Ainsi, en utilisant la représentation binaire et les deux règles nous obtenons par un calcul élémentaire la fonction génératrice de la base de Gel'fand et la fonction génératrice des coefficients de couplage.

Les fonctions génératrices des coefficients de couplages ont des expressions très longues pour $n>3$. Mais nous savons que les coefficients de couplage de SU(n) s'écrivent comme une somme de produit de deux coefficients. L'un d'eux est le coefficient de couplage de SU($n-1$) et l'autre est le facteur isoscalaire (Klimyk 1967) de SU(n). Nous avons construit dans ce travail la fonction génératrice des facteurs isoscalaires dont nous pouvons déduire l'expression de ces facteurs.

Notre approche détermine non seulement les expressions algèbriques des facteurs isoscalaires, résultats difficiles à trouver par les autres méthodes (Klimyk 1967), mais permet le calcul des éléments de la base de la représentation du produit direct de N représentations.

Dans § 2, nous exposons la schématisation des représentations fondamentales et les règles afin de calculer les ϕ correspondants et le calcul de la fonction génératrice de la base de Gel'fand du groupe SU(n). Dans § 3, nous présentons le calcul de la fonction génératrice des coefficients de couplage. La détermination de la fonction génératrice des facteurs isoscalaires fera l'objet du § 4. Le § 5 est réservé à la détermination des éléments de la base de la représentation irréductible du produit direct de N représentations.

2. Calcul de la fonction génératrice de la base de Gel'fand

2.1. *Fonction génératrice de la base de Gel'fand*

La fonction génératrice de la base de Gel'fand du groupe SU(n) (Hage Hassan 1983a) est donnée par

$$\sum_{h_{\mu\nu}} A_n \phi_n (h_{\mu\nu}, (y, z)) \Gamma_n \begin{pmatrix} [h]_n \\ (h)_n \end{pmatrix} (\Delta(z)) = \exp\Big(\sum_i \phi^i_n x^n_i (z) \Big) \tag{1}$$

avec

$$\Gamma \begin{pmatrix} [h]_n \\ (h)_n \end{pmatrix} = \Gamma_n \begin{pmatrix} [h]_n \\ [h]_{n-1} \\ (h)_{n-2} \end{pmatrix} = \Gamma_n \begin{pmatrix} h_{1n} & \dots & h_{n-1\,n} & 0 \\ & \dots & & \\ & h_{12} & h_{22} & \\ & & h_{11} & \end{pmatrix} \tag{2}$$

et

$$h_{1\mu} \geqslant h_{1\mu-1} \geqslant h_{2\mu} \ldots \geqslant h_{\mu\lambda} \geqslant h_{\mu\lambda-1} \geqslant h_{\mu+1\lambda} \geqslant \ldots \geqslant h_{n-1,\, n-1} \geqslant 0 \tag{3}$$

$$\phi_n(h_{\mu\nu}, (y, z)) = \prod_{\lambda=2}^{n} \prod_{\mu=1}^{\lambda-1} [z(\lambda, \mu)^{d_{\lambda\mu}} y(\lambda, \mu)^{d'_{\lambda\mu}}] \tag{4}$$

$$d_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda} - h_{\mu\lambda-1}, \qquad d'_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda-1} - h_{\mu+1\lambda}. \tag{5}$$

Les coefficients A_n, ont une longue expression, nous omettons de les transcrire dans ce travail (voir Hage Hassan 1982a).

$\{x_i^n(z)\}$ est l'ensemble de mineurs $\{\Delta(z)\} = \{\Delta_{i_1 \ldots i_l}^{1, 2 \ldots l};\ 1 \leqslant l \leqslant n\}$ construits à partir de la matrice complexe (z_i^j) $(i, j = 1, \ldots, n)$ par la sélection des lignes $1, 2, \ldots, l$ et des colonnes $i_1, \ldots, i_l$. La détermination de ces mineurs à l'aide des notations de Gel'fand $\Gamma_n\binom{[h]_n}{(h)_n}$ (où $h_{\mu\nu}$ est égal à zéro ou un) s'effectue par l'intermédiaire de la représentation binaire que nous introduisons dans le § 2.2.

Les coefficients ϕ_n^i s'obtiennent en remplaçant les indices $h_{\mu\nu}$ de $x_i^n(z)$, exprimés dans les notations de Gel'fand, par leurs valeurs dans l'expression (4). Dans ce cas $d_{\lambda\mu}$ et $d'_{\lambda\mu}$ sont égaux à zéro ou à un. Il en résulte que ϕ_n^i est un produit de paramètres $y(\lambda, \mu)$ et $z(\lambda, \mu)$.

Pour faciliter le calcul de $d_{\lambda\mu}$ et $d'_{\lambda\mu}$ dans le paragraphe suivant nous modifions l'écriture du tableau de Gel'fand par:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & h_{1n} & h_{2n} & \ldots & h_{n-1\,n} & 0 & & \\
 & h_{1\,n-1} & \ldots & h_{n-1\,n-1} & & & & \\
 & & \ldots & & & & & \\
 & h_{1\lambda} & h_{2\lambda} & \ldots & h_{\mu\lambda} & h_{\mu+1\lambda} & & \\
d_{\lambda\mu} \longrightarrow & & & & \swarrow & \nearrow & \longleftarrow d'_{\lambda\mu} & \\
 & h_{1\,\lambda-1} & \ldots & h_{\mu\lambda-1} & & & & \\
 & & \ldots & & & & &
\end{array} \tag{6}$$

La différence entre l'indice du début et celui de la fin des flèches nous donne $d_{\lambda\mu}$ et $d'_{\lambda\mu}$.

2.2. *Représentation binaire de $x_i^n(z)$*

Nous présentons dans ce qui suit une schématisation des éléments de la BRF que nous appelons la représentation binaire. Cette nouvelle schématisation est très pratique pour le calcul de la fonction génératrice de la base de Gel'fand et des coefficients de couplage de cette base.

Nous représentons le déterminant $\Delta_{i_1 \ldots i_l}^{12 \ldots l}$ par un tableau à n cases numérotées de 1 à n. Nous posons un dans les cases $i_1, i_2, \ldots, i_l$ et zéro ailleurs.

	1	2	$\cdots$	i_1	$\cdots$	i_l	$\cdots$	n
$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_l}^{12 \ldots l} =$	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	0

Tableau (1)

Nous déduisons du tableau (1) l'expression de $\Delta_{i_1\ldots i_l}^{1,2\ldots l}$ dans les notations de Gel'fand, voir tableau (2), en posant:

$$\begin{cases} h_{\mu(n+\nu-1)}=1 & \text{pour} \begin{cases}\mu\leqslant l\\ \nu\leqslant m_\mu\end{cases} \\ h_{\mu\nu}=0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

avec $m_\mu = n - i_\mu + 1$.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\lambda\backslash\mu & 1 & 2 & \ldots & & l & \ldots & n\\ \hline
n & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
i_l & 1 & \ldots & & 1 & & & \\
\vdots & 1 & & & 0 & & & \\
 & \vdots & & & & & & \\
i_1 & 1 & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & & & & & \\
1 & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Tableau (2)

Inversement, si nous avons un tableau de Gel'fand de la BRF on déduit les m_μ et on détermine la position des 'uns' dans le tableau (1). Ainsi nous pouvons déduire le mineur correspondant. Il en résulte que la correspondance entre les deux tableaux (1) et (2) est biunivoque.

Du point de vue pratique nous pouvons déterminer tous les éléments de la BRF de SU(n) en remplissant 2^n-2 tableaux de n cases par les nombres $1, 2, \ldots, 2^n-2$ exprimés en binaire. Nous donnons dans les tables 1 et 2 les cas où $n=2$ et $n=3$.

Nous représentons le déterminant $\Delta_{1\ldots l}^{j_1\ldots j_l}$ par le tableau (3) et le déterminant $\Delta_{i_1\ldots i_l}^{j_1\ldots j_l}$ par le tableau (4).

$\Delta_{1\ldots l}^{j_1\ldots j_l}=$

1		j_1			j_l	
0	...	1	...		...	0

,

Tableau (3)

$\Delta_{i_1\ldots i_l}^{j_1\ldots j_l}=$

1		j_1	...	i_1	...	j_l	...	i_l		n
0	...	1	...	0	...	1	...	0	...	0
0	...	0		1		0		1		0

Tableau (4)

Table 1.

	1	2	3
RB	$\boxed{0}\boxed{1}$	$\boxed{1}\boxed{0}$	$\boxed{1}\boxed{1}$
La base de Gel'fand	$\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & & 1\\ & 1 & \end{pmatrix}$
ϕ_i^3	$z(2,1)$	$y(2,1)$	$y(2,2)$

Table 2.

	1	2	3	4	5	6	7
RB	$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}$	$\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$	$\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}$	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$
La base de Gel'fand	$\begin{pmatrix}1 & & 0 & & 0\\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & & 0 & & 0\\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & & 1 & & 0\\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & & 0 & & 0\\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & & 1 & & 0\\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & & 1 & & 0\\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & & 1 & & 1\\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}$
ϕ_i^3	$z(3,1)$	$z(2,1)$ $y(3,1)$	$z(2,1)$ $z(3,2)$	$y(2,1)$ $y(3,1)$	$z(3,2)$ $y(2,1)$	$y(3,2)$	$y(3,3)$

Le dernier tableau est important pour le calcul des éléments de la matrice de la représentation de $\mathrm{U}(n)$ de la chaine canonique. Ces éléments sont représentés par deux tableaux de Gel'fand $\binom{[h]}{(h)}$ et $\binom{[h']}{(h')}$ avec $[h']=[h]$ (Louck 1970). Nous notons ces éléments par

$$\begin{pmatrix}(h')\\ [h]\\ (h)\end{pmatrix}(\mathrm{U}_n) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}(h')\\ [h]\\ (h)\end{pmatrix}(z_i^j) \quad \text{par} \quad \begin{pmatrix}(h')\\ [h]\\ (h)\end{pmatrix}.$$

2.3. *Calcul des coefficients ϕ_n^i*

Les coefficients ϕ_n^i s'écrivent sous la forme d'un produit de paramètres $z(\lambda, \mu)$ et $y(\lambda, \mu)$. Nous déterminons les indices λ et μ de ces paramètres en utilisant les règles suivantes.

(a) Nous associons à chaque 'un' qui figure après le premier zéro (voir tableau (1)) un paramètre $z(\lambda, \mu)$ dont l'indice λ est le numéro de la case et μ est le nombre des 'uns' avant lui, plus un.

(b) Nous associons à chaque zéro qui figure après le premier 'un', dans le tableau (1), un $y(\lambda, \mu)$ dont l'indice λ est le numéro de la base et μ est le nombre des 'uns' avant lui.

Pour démontrer ces règles, il suffit de choisir un tableau de Gel'fand de la BRF, de calculer $d_{\lambda\mu}$ et $d'_{\lambda\mu}$ et d'en déduire le ϕ correspondant et de comparer les résultats obtenus en utilisant les règles. Dans le cas du tableau (3) nous trouvons après le calcul de $d_{\lambda\mu}$ et $d'_{\lambda\mu}$:

$$\phi_n^i = \prod_{j=1}^{l} \left(z(i_j, j) \prod_{k=1}^{S_j} y(i_j + k, j) \right) \tag{7}$$

avec

$$i_{l+1}=n \qquad \text{et} \qquad S_j=i_j-i_{j+1}+(1-\delta_{i_l,n}).$$

Cette même expression s'obtient par simple application des règles (a) et (b).

Dans le cas où il y a des 'uns' partout dans le tableau (1) nous associons le paramètre $y(n, n)$ (Hage Hassan 1983a).

A l'aide de la représentation binaire de $\mathrm{SU}(n)$ et des règles (a) et (b) nous pouvons déduire les fonctions génératrices de la base de la représentation des groupes unitaires.

Nous donnons dans les tables 1 et 2 les résultats des calculs pour $n=2$ et $n=3$, respectivement. Ces cas sont importants dans la suite de ce travail.

3. Calcul de la fonction génératrice des coefficients de couplage

Nous allons exposer le calcul de la fonction génératrice des coefficients de couplage en utilisant la représentation binaire et les règles (a) et (b).

La fonction génératrice des coefficients de couplage du produit direct de p représentations du groupe $\mathrm{SU}(n)$ (Hage Hassan 1983b) est donnée par:

$$\sum_{h_{\mu\nu}} A_{p(n-1)}\phi_{p(n-1)}(h_{\mu\nu},(y,z))h_n\binom{[h]_{p(n-1)}}{(h)_{p(n-1)}}(\phi^1,\ldots,\phi^p)$$
$$=\exp\Big(\sum_i {}^s\phi^i_{p(n-1)}\,{}^sx^n_i(\phi^1,\ldots,\phi^p)\Big). \tag{8}$$

$h_n\binom{[h]_{p(n-1)}}{(h)_{p(n-1)}}$ sont des éléments de la base de la représentation du groupe $\mathrm{SU}(p(n-1))$.

Les ϕ^i sont constitués de produits de paramètres de la fonction génératrice de la $i^{\text{ème}}$ représentation que nous notons par $zi(\lambda,\mu)$ et $yi(\lambda,\mu)$. De même $d_{\lambda\mu}$ et $d'_{\lambda\mu}$ seront notés $di_{\lambda\mu}$ et $d'i_{\lambda\mu}$.

Pour calculer ${}^s\phi^i_{p(n-1)}$ et ${}^sx^n_i$ il est nécessaire de déterminer les scalaires élémentaires du produit direct de p représentations dans la représentation binaire et les ϕ correspondants.

3.1. *Scalaires élémentaires du produit de p représentations*

Les scalaires élémentaires du produit de p représentations sont des déterminants (Hage Hassan 1983b) qui sont de la forme

$$\Delta^{1,2,\ldots,\alpha_1,(n-1)+1,\ldots,\alpha_2+(n-1),\ldots,\alpha_{p+(n-1)(p-1)}}_{1,2,\ldots,n}. \tag{9}$$

Ces déterminants s'écrivent plus simplement à l'aide d'un tableau de type (3), de p rangées et chaque rangée contient $(n-1)$ cases. Les premières cases de chaque rangée contiennent des 'uns' et zéro ailleurs

1	2	$\cdots$	α_1			$(n-1)$			$\alpha_2+(n-1)$
1	1	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	1

	$(p-1)(n-1)$			$p(n-1)$
$\cdots$	0	1	$\cdots$	0

(10)

Le nombre des cases contenant des 'uns' dans la $i^{\text{ème}}$ rangée est α_i avec

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant n-1, \qquad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n. \tag{11}$$

L'ensemble des représentations binaires du type (10) qui vérifient les conditions (11) forment l'ensemble des scalaires élémentaires qui sont des éléments de la base de la représentation de $SU(p(n-1))$. Ces représentations seront notées pour la commodité par:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_p & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{\cdots} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

Le développement du déterminant (9) sur la base du produit de p représentations de $SU(n)$ est:

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \Delta^{x_1^1, x_2^1 \ldots x_{\alpha_1}^1}_{i_{\beta_1} \ldots i_{(\beta_2-1)}} \times \ldots \times \Delta^{x_1^p \ldots x_{\alpha_p}^p}_{i_{\beta_p} \ldots i_{(\beta_{p+1}-1)}} \tag{12}$$

avec

$$x_j^i = (i-1)(n-1) + j, \qquad \beta_1 = 1, \qquad \beta_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i + 1,$$

$$i_{\beta_j} < i_{(\beta_j+1)} < \ldots < i_{(\beta_{(j+1)}-1)} \qquad (j = 1, p).$$

$(-1)^{I(i_1, \ldots, i_n)}$ est la signature de la permutation de $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Dans la notation de la représentation binaire l'expression (12) se met sous la forme

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_p & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\cdots} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} = \sum_{i_1 \ldots i_n} (-1)^{I(i_1, \ldots, i_n)}$$

$$\times \begin{array}{ccccc} i_1 & & & i_{\alpha_1} & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{\cdots} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} \times \ldots \times \begin{array}{ccccc} i_{\beta_p} & & & i_n & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{\cdots} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} \tag{13}$$

Le second membre est constitué de produits de p représentations de $SU(n)$, ordonnées de 1 à p. Dans le $j^{\text{ème}}$ nombre binaire de (13) nous avons des 'uns' dans les cases $i_{\beta_j}, \ldots, i_{(\beta_{(j+1)}-1)}$ et zéro ailleurs.

3.2. *Calcul de ${}^s\phi^i_{p(n-1)}$ et ${}^s x^n_i$*

3.2.1. La détermination de ${}^s\phi^i_{p(n-1)}$ s'obtient en appliquant les règles (a) et (b) à la représentation binaire de la partie gauche de l'expression (13).

3.2.2. Le calcul de ${}^s x^n_i$, que nous écrivons aussi

$${}^s x^n \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & & \alpha_p & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\cdots} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

s'effectue en appliquant les règles (a) et (b) à la partie droite de l'expression (13) et en tenant compte des paramètres de la $i^{\text{ème}}$ représentation qui sont $y\,i(\lambda, \mu)$ et $z\,i(\lambda, \mu)$. Mais il est preférable de calculer ces coefficients par recurrence sur n et en prenant le cas $n = 2$ pour point de départ. Ce calcul est très important pour l'obtention de la fonction génératrice des facteurs isoscalaires.

3.2.2.1. Pour $n = 2$ les scalaires élémentaires sont

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \widetilde{1} & 0 \\ \hline\end{array}\;, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \widetilde{0} & 1 \\ \hline\end{array}\;, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \widetilde{1} & 1 \\ \hline\end{array}\;. \tag{14}$$

A l'aide du développement (13) et des règles (a) et (b) nous écrivons

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \widetilde{1} & 0 \\ \hline\end{array} = - \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$
$$+ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}\;.$$

Nous déduisons que

$${}^s\phi_2^1 = y(3, 2), \qquad {}^s x_1^2 = {}^s x^2_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}} = -z\,1(2, 1)y\,2(2, 1) + y\,1(2, 1)z\,2(2, 1). \tag{15}$$

De même

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \widetilde{0} & 1 \\ \hline\end{array} = - \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$
$$+ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$s\phi_2^2 = z(3, 2)y(2, 1), \qquad {}^s x_2^2 = {}^s x^2_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}} = -z\,1(2, 1)y\,3(2, 1) + y\,1(2, 1)z\,3(2, 1) \tag{16}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \widetilde{1} & 1 \\ \hline\end{array} = - \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$
$$+ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$${}^s\phi_2^3 = z(2, 1)z(3, 2), \qquad {}^s x_3^2 = {}^s x^2_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}} = -z\,2(2, 1)y\,3(2, 1) + y\,2(2, 1)z\,3(2, 1). \tag{17}$$

La fonction génératrice des coefficients de couplage du groupe SU(2) est donc:

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{3} {}^s\phi_2^i\, {}^s x_i^2\right) = \sum_{h_{\mu\nu}} A_3\phi_3(h_{\mu\nu}, (y, z))h_2\begin{pmatrix} h_{13} & h_{11} & 0 \\ h_{12} & h_{22} & \\ & h_{11} & \end{pmatrix}(\phi^1, \phi^2, \phi^3). \tag{18}$$

Cette expression est la fonction génératrice des coefficients de couplage déjà calculée par Schwinger (1965).

3.2.2.2. Dans le cas général nous écrivons l'expression (13) sous la forme

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & & & \alpha_p \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\cdots} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array} = \sum (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \begin{matrix} \times \boxed{} \\ \times \boxed{} \\ \times \boxed{} \end{matrix} \tag{19}$$

Nous considérons plusieurs cas.

(1) L'un des α_i est nul, un autre est égal à un. Nous prenons $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = n - 1$ et $\alpha_3 = 0$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$= \sum (-1)^{I(i_1, \ldots, i_n} \begin{matrix} i_1 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{matrix} n \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \end{matrix} + \sum (-1)^{I(i_1, \ldots, i_n)} \begin{matrix} i_1 < n \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix}$$

L'application des règles (a) et (b) donne

$${}^s x^n \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$= (-1)^{n-1} z\,1(n, 1) y\,2(n, n-1) + y\,1(n, 1) z\,2(n, n-1)\, {}^s x^{n-1} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \tag{20}$$

(2) L'un des α_i est nul, $\alpha_3 = 0$, et les deux autres sont plus grands que un.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$= \sum_{i_1\ldots i_n} (-1)^{I(i_1,\ldots,i_{\alpha_1},\, i_{(\alpha_1+1)},\ldots,i_n)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i_1 & & i_{\alpha_1} & \end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&\cdots&1&0\\\hline\end{array}\\ \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&\cdots&0&1\\\hline\end{array}\end{array}$$

$$= \sum (-1)^{I(i_1,\ldots,i_{(\alpha_1-1)},\, n,\, i_{(\alpha_1+1)},\ldots,i_n)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & i_1 & & i_{(\alpha_1+1)} & & n \end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0'&1&\cdots&1&\cdots&1\\\hline\end{array}\\ \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \ &0&\cdots&0&\cdots&0\\\hline\end{array}\end{array}$$

$$+ \sum (-1)^{I(i_1,\ldots,n)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & i_1 & & i_{\alpha_1}<n & & \end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&\cdots&1&0&0\\\hline\end{array}\\ \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&\cdots&0&1&1\\\hline\end{array}\end{array}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} &{}^{s}x^{n} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & \alpha_2 & & \end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&0&0\\\hline\end{array}\end{array}\\ &\qquad = (-1)^{n-\alpha_1} z\,1(n,\alpha_1)\, y\,2(n,\alpha_2)\, {}^{s}x^{n-1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (\alpha_1-1) & & \alpha_2 & & \end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&0&0\\\hline\end{array}\end{array}\\ &\qquad\quad + y\,1(n,\alpha_1)\, z\,2(n,\alpha_2)\, {}^{s}x^{n-1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & (\alpha_2-1) & & \end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&0&0\\\hline\end{array}\end{array} \end{aligned} \tag{21}$$

(3) Dans le cas général où les α_i sont plus grands que un

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & \widetilde{\alpha_2} & & \alpha_3 & \end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&0&1&0\\\hline\end{array}\end{array}$$

$$= \sum (-1)^{I(i_1,\ldots,i_n)} \begin{array}{c} \times \begin{array}{|c|}\hline \qquad\qquad\qquad \\\hline\end{array}\\ \times \begin{array}{|c|}\hline \qquad\qquad\qquad \\\hline\end{array}\\ \times \begin{array}{|c|}\hline \qquad\qquad\qquad \\\hline\end{array}\end{array}$$

$$= \sum (-1)^{I(i_1,\ldots,i_{(\alpha_1-1)},\, n,\, i_{(\alpha_1+1)},\ldots,i_n)} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & 1\\\hline\end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & 0\\\hline\end{array}\\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & 0\\\hline\end{array}\end{array}$$

$$+\sum(-1)^{I(i_1,\ldots,i_{(\alpha_2-1)},n,i_{(\alpha_2+1)},\ldots,n)}\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 0\\\hline & & 1\\\hline & & 0\\\hline\end{array}$$

$$+\sum(-1)^{I(i_1,\ldots,i_{\alpha_1},\ldots,n)}\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 0\\\hline & & 0\\\hline & & 1\\\hline\end{array}$$

Nous obtenons dans ce cas

$$^{s}x^{n}\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

$$= (-1)^{\alpha_2+\alpha_3} z1(n,\alpha_1)y2(n,\alpha_2)y3(n,\alpha_3)^{s}x^{n-1}\begin{array}{cccccc} \alpha_1-1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

$$\times(-1)^{\alpha_3} y1(n,\alpha_1)z2(n,\alpha_2)y3(n,\alpha_3)^{s}x^{n-1}\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & (\alpha_2-1) & & \alpha_3 & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

$$+ y1(n,\alpha_1)y2(n,\alpha_2)z3(n,\alpha_3)^{s}x^{n-1}\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & \alpha_2 & & (\alpha_3-1) & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} \tag{22}$$

Dans la suite de ce travail $^{s}x^{n}\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\\hline\end{array}$ sera noté par $^{s}x_i^{n}(yj, zj, {}^{s}x^{n-1})$ (avec $j = 1, 2, 3$).

La fonction génératrice des coefficients de couplage du groupe unitaire s'obtient en remplaçant le calcul de $^{s}x_i^{n}$ et $^{s}\phi^{i}_{p(n-1)}$ par la méthode exposée ci-dessus dans l'expression (8). Mais le calcul des coefficients de couplage à partir de cette fonction génératrice est difficile pour $n>3$. D'où l'importance de calculer la fonction génératrice des facteurs isoscalaires.

4. Fonction génératrice des facteurs isoscalaires des groupes unitaires

Pour calculer la fonction génératrice des facteurs isoscalaires il faut d'abord porter les expressions (20), (21) et (22) dans (8). Nous obtenons

$$\exp\Big(\sum_i {}^{s}\phi^{i}_{n}\,{}^{s}x_i^{n}(\phi^1,\phi^2,\phi^3)\Big)$$

$$= \sum_{h_{\mu\nu}} A_{3(n-1)}\phi_{3(n-1)}(h_{\mu\nu},(y,z)) \times h_n\binom{[h]_{3(n-1)}}{(h)_{3(n-1)}}(\phi^1,\phi^2,\phi^3) \tag{23}$$

avec

$$h_n\begin{pmatrix}[h]_{3(n-1)}\\(h)_{3(n-1)}\end{pmatrix}(\phi^1,\phi^2,\phi^3)$$

$$=\sum_{(h^i_{\mu\nu})_n}\begin{pmatrix}[h^1]_n & [h^2]_n & [h^3]_n\\(h^1)_n & (h^2)_n & (h^3)_n\end{pmatrix}\prod_{i=1}^{3}[(A_n)^i(B_n)^i\phi_{(n-1)}(h^i_{\mu\nu},(yi,zi))]. \tag{24}$$

La sommation dans l'expression (24) porte sur tous les indices des tableaux $(h^i_{\mu\nu})_n(i=1,2,3)$.

Les coefficients $(A_n)^i$ et $(B_n)^i$ s'obtiennent de A_n et B_n (Hage Hassan 1983b) en remplaçant $h_{\mu\nu}$ par $h^i_{\mu\nu}$. $\left(\begin{smallmatrix}[h^1]_n[h^2]_n[h^3]_n\\(h^1)_n(h^2)_n(h^3)_n\end{smallmatrix}\right)$ est le coefficient $3-[h]$.

L'expression des coefficients $3-[h]$ peut s'écrire (Klimyk 1967) sous la forme

$$\begin{pmatrix}[h^1]_n & [h^2]_n & [h^3]_n\\(h^1)_n & (h^2)_n & (h^3)_n\end{pmatrix}=\sum_\rho\Bigg[\begin{pmatrix}[h^1]_n & [h^2]_n & [h^3]_n\\[h^1]_{n-1} & [h^2]_{n-1} & [h^3]_{n-1}\end{pmatrix}_\rho$$
$$\times\begin{pmatrix}[h^1]_{n-1} & [h^2]_{n-1} & [h^3]_{n-1}\\(h^1)_{n-1} & (h^2)_{n-1} & (h^3)_{n-1}\end{pmatrix}_\rho\Bigg]. \tag{25}$$

ρ est l'indice de multiplicité qui s'exprime à l'aide des indices des $h_{n-1}\left(\begin{smallmatrix}[h]_{3(n-2)}\\[h]_{3(n-2)}\end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{pmatrix}[h^1]_n & [h^2]_n & [h^3]_n\\[h^1]_{n-1} & [h^2]_{n-1} & [h^3]_{n-1}\end{pmatrix}_\rho$$

est le facteur isoscalaire du groupe $SU(n)$ $(SU(n)\supset SU(n-1))$.

Si on reporte l'expression (25) dans (24) et en tenant compte que:

$$\phi_n(h^i_{\mu\nu},(yi,zi))=\left[\prod_{\mu=1}^{n-1}yi(n,\mu)^{d'i_{n\mu}}zi(n,\mu)^{di_{n\mu}}\right]\prod_{\lambda=1}^{n-1}\prod_{\mu=1}^{\lambda-1}[yi(\lambda,\mu)^{d'i_{\lambda\mu}}zi(\lambda,\mu)^{di_{\lambda\mu}}], \tag{26}$$

et $(A_n)^i=(A_{n-1})^i(A^n)^i$.

Nous écrivons

$$h_n\begin{pmatrix}[h]_{3(n-1)}\\(h)_{3(n-1)}\end{pmatrix}(\phi^1,\phi^2,\phi^3)$$
$$=\sum_{\substack{h^i_{\mu n}\\(\mu<n)}}\Bigg[\begin{pmatrix}[h^1]_n & [h^2]_n & [h^3]_n\\[h^1]_{n-1} & [h^2]_{n-1} & [h^3]_{n-1}\end{pmatrix}_\rho\prod_{\mu=1}^{n-1}(yi(n,\mu)^{d'i_{n\mu}}zi(n,\mu)^{di_{n\mu}})\Bigg]$$
$$\times\Bigg[\sum_{(h^i_{\mu\nu})_{n-1}}\begin{pmatrix}[h^1]_{n-1} & [h^2]_{n-1} & [h^3]_{n-1}\\(h^1)_{n-1} & (h^2)_{n-1} & (h^3)_{n-1}\end{pmatrix}_\rho(A_{n-1})^i(B_{n-1})^i$$
$$\times\prod_{\lambda=1}^{n-1}\prod_{\mu=1}^{\lambda-1}[yi(\lambda,\mu)^{d'i_{\lambda\mu}}zi(\lambda,\mu)^{di_{\lambda\mu}}]\Bigg]. \tag{27}$$

La quantité dans le deuxième crochet est un élément $h_{n-1}\left(\begin{smallmatrix}[h]_{3(n-2)}\\[h]_{3(n-2)}\end{smallmatrix}\right)(\phi^1,\phi^2,\phi^3)$. Mais ces éléments sont fonctions des coefficients ${}^sx_i^{n-1}(\phi^1,\phi^2,\phi^3)$ par suite

$$\exp\left(\sum_i{}^s\phi_n^i\,{}^sx_i^n(yj,zj,{}^sx^{n-1})\right)$$
$$=\sum_{\substack{h_{\mu\nu}h^i_{\mu n}\\(\mu<n)}}\begin{pmatrix}[h^1]_n & [h^2]_n & [h^3]_n\\[h^1]_{n-1} & [h^2]_{n-1} & [h^3]_{n-1}\end{pmatrix}_\rho A_{3(n-1)}\phi_{3(n-1)}(h_{\mu\nu},(y,z)) \tag{28}$$

$$\times \prod_{i=1}^{3} \left[\frac{(A^n)^i (B_n)^i}{(B_{n-1})^i} \prod_{\mu=1}^{n-1} (yi(n,\mu)^{d'i_{n\mu}} zi(n,\mu)^{di_{n\mu}}) \right] h_{n-1} \binom{[h']_{3(n-2)}}{[h']_{3(n-2)}} ({}^s x^{n-1}).$$

$[h']_{3(n-2)}$ et $(h')_{3(n-2)}$ sont fonction des indices des tableaux $(h^i_{\mu\nu})_n$. En utilisant l'expression (Hage Hassan 1983b) suivante

$$\Gamma_n \binom{[h']_n}{(h')_n} (\phi_n) = A'_n B'_n \phi_n (h'_{\mu\nu}, (y', z')) \tag{29}$$

et en remplacant ${}^s x_i^{n-1}$ par ${}^s\phi_{n-1}\,(h'_{\mu\nu}, (y', z'))$, $h'_{\mu\nu}$ sont les indices de ${}^s x_i^{n-1}$ exprimés dans les notations de Gel'fand, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\exp\Big(\sum_i {}^s\phi_n^i\, {}^s x_i^n (yj, zj, {}^s\phi_{n-1})\Big) \\
&= \sum \begin{pmatrix} [h^1]_n & [h^2]_n & [h^3]_n \\ [h^1]_{n-1} & [h^2]_{n-1} & [h^3]_{n-1} \end{pmatrix}_p A_{3(n-1)} \phi_{3(n-1)} (h_{\mu\nu}, (y, z)) \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{3} \left[\frac{(A^n)^i (B_n)^i}{(B_{n-1})^i} \prod_{\mu=1}^{n-1} (yi(n,\mu)^{d'i_{n\mu}} zi(n,\mu)^{di_{n\mu}}) \right] \\
&\quad \times [A'_{3(n-2)} B'_{3(n-2)} \phi_{3(n-2)} (h'_{\mu\nu}, (y', z'))],
\end{aligned} \tag{30}$$

$A'_{3(n-2)}$ et $B'_{3(n-2)}$ s'expriment à l'aide des indices $h'_{\mu\nu}$.

Le calcul du facteur isoscalaire s'obtient en développant le premier membre et en identifiant avec le second membre.

Du point de vue pratique, nous déterminons les scalaires élémentaires et les ϕ correspondants en utilisant les règles (a) et (b). Ensuite à l'aide des développements (20), (21) et (22) nous pouvons calculer les ${}^s x^n$ en fonction des $yi(n, \alpha)$, $zi(n, \alpha)$ et des ${}^s x^{n-1}$, puis on remplace ${}^s x^{n-1}$ par les ϕ correspondants en utilisant les règles citées ci-dessus. Ainsi nous déterminons la fonction génératrice des facteurs isoscalaires des groupes unitaires dont le calcul s'effectue en comparant le développement du premier membre de l'expression (30) avec le second membre. Un programme de calcul sur ordinateur de la fonction génératrice des facteurs isoscalaires est disponible.

5. Elément de la base de la représentation du produit direct de N représentations

Les éléments de la base de la représentation irréductible du produit direct de N représentations ($N = p - 1$) se déduisent de la fonction génératrice des invariants de Weyl $\exp(\Sigma_i {}^s\phi_n^i\, {}^s x_i^n)$ (Hage Hassan 1983b). Pour cela il faut développer ${}^s x_i^n$ sur les bases du produit de deux représentations l'une est la base de la représentation du groupe SU(n) et l'autre est la base où les éléments des matrices de la représentation du groupe, ou sous groupe, de SU($p(n-1)$). Il est nécessaire d'écrire ${}^s x_i^n$ sous la forme d'un déterminant pour la simplicité du calcul. Une fois déterminé le développement de ${}^s x_i^n$, nous devons l'écrire à l'aide de la représentation binaire et en utilisant le tableau (1), schématiser les éléments de RF de SU(n) et le tableau (4) pour représenter les éléments de l'autre base.

Nous notons par $\{y3(\lambda, \mu),\ z3(\lambda, \mu)\}$ les paramètres associés à la fonction génératrice de la base de SU(n) et par $\{y1(\lambda, \mu),\ z1(\lambda, \mu),\ y2(\lambda, \mu),\ z2(\lambda, \mu)\}$ les paramètres associés à la fonction génératrice du groupe, ou sous groupe, de SU($p(n-1)$). Nous remplaçons ensuite les tableaux par les ϕ correspondants en utilisant les règles

(a) et (b) et on remplace ${}^s x_i^n$ par les résultats obtenus dans la fonction génératrice des invariants de Weyl.

Après développement de la fonction génératrice ainsi obtenue nous déduisons des puissances de paramètres $y1(\lambda, \mu)$, $z1(\lambda, \mu)$, $y2(\lambda, \mu)$, $z2(\lambda, \mu)$ les indices de la base ou des éléments de la base de la représentation du groupe, ou sous groupe, de $SU(p(n-1))$. Ainsi nous obtenons la base de la représentation du produit direct de N représentations.

Nous traitons à titre d'exemple le cas du produit direct de deux représentations du groupe SU(2).

La fonction génératrice des invariants de Weyl du groupe SU(2) est

$$\exp[y(3,2)\Delta^{12}_{12} + y(2,1)z(3,2)\Delta^{13}_{12} + z(2,1)z(3,2)\Delta^{23}_{12}]. \tag{31}$$

Le développement des scalaires est

(1) $$\Delta^{12}_{12} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \tag{32}$$

(2) $$\Delta^{13}_{12} = \Delta^1_1\Delta^3_2 - \Delta^1_2\Delta^3_1$$

$$= \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \tag{33}$$

(3) $$\Delta^{23}_{12} = \Delta^2_1\Delta^3_2 - \Delta^2_2\Delta^3_1$$

$$= \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \tag{34}$$

Nous remarquons que Δ^1_1, Δ^1_2, Δ^2_1, Δ^2_2, Δ^{12}_{12} sont les éléments de la matrice de la représentation du groupe U(2). Il n'est pas nécessaire de garder SU(3) comme la base du produit direct de deux représentations du groupe SU(2).

Les ϕ correspondants à ces scalaires sont

(1) $$y1(2,2) \tag{35}$$

(2) $$y1(2,1)y2(2,1)z3(2,1) - y1(2,1)z2(2,1)y3(2,1)$$
$$= y1(2,1)[y2(2,1)z3(2,1) - z2(2,1)y3(2,1)] \tag{36}$$

(3) $$z1(2,1)y2(2,1)z3(2,1) - z1(2,1)z2(2,1)y3(2,1)$$
$$= z1(2,1)[y2(2,1)z3(2,1) - z2(2,1)y3(2,1)]. \tag{37}$$

Si on met (35), (36) et (37) à la place des déterminants Δ^{12}_{12}, Δ^{13}_{12} et Δ^{23}_{12} dans la fonction génératrice des invariants de Weyl (31) et si on effectue le développement de la fonction obtenue nous trouvons

$$\sum_{j_1 j_2 j_3 m_3} \left(\frac{y(3,2)^{J_1} y(2,1)^{J_1} z(2,1)^{J_3} z(3,2)^{J_1+J_2}}{J_1! J_2! J_3!} \right)$$
$$\times (-1)^{m_3} [y1(2,2)^{J_3} y1(2,1)^{J_2} z1(2,1)^{J_1} y2(2,1)^{j_3+m_3} z2(2,1)^{j_3-m_3}]$$
$$\times [y3(2,1)^{j_3-m_3} z3(2,1)^{j_3+m_3}] \tag{38}$$

avec

$$J_1 = j_2 + j_3 - j_1, \qquad J_2 = j_1 + j_3 - j_2, \qquad J_3 = j_1 + j_2 - j_3. \tag{39}$$

$j_3 - m_3, j_3 + m_3, J_1, J_2, J_3$ sont des entiers positifs. De l'expression (38) nous déduisons que les éléments de la représentation irréductible du produit direct sont les éléments de la matrice de la représentation du groupe U(2),

$$\begin{pmatrix} & h'_{11} & \\ h_{12} & & h_{22} \\ & h_{11} & \end{pmatrix},$$

avec

$$h_{22} = J_3, \qquad h_{12} - h_{11} = J_1, \qquad h_{11} - h_{22} = J_2,$$
$$h_{12} - h'_{11} = j_3 - m_3, \qquad h'_{11} - h_{22} = j_3 + m_3 \tag{40}$$

on déduit que

$$h_{12} = j_1 + j_2 + j_3, \qquad h_{22} = j_1 + j_2 - j_3,$$
$$h_{11} = 2j_1, \qquad h'_{11} = j_1 + j_2 + m_3. \tag{41}$$

Il est important de souligner que la quantité dans le deuxième crochet de l'expression (38) est la même que le produit de paramètres introduits par Schwinger (1965), avec des notations différentes, pour la construction de la fonction génératrice de la représentation irréductible du produit direct de deux représentations du groupe SU(2).

6. Conclusion

Dans ce travail, nous avons développé une méthode pratique pour le calcul de la fonction génératrice de la base de Gel'fand des groupes unitaires et des coefficients de couplage de cette base.

Nous avons introduit la représentation binaire qui est une nouvelle schématisation des éléments de la BRF et nous avons montré la correspondance avec les tableaux de Gel'fand. Ainsi pour déterminer les éléments de la BRF de SU(n), il suffit de remplir $2^n - 2$ tableaux de n cases par les nombres $1, 2, \ldots, 2^n - 2$ exprimés en binaire.

Nous avons montré qu'à l'aide de deux règles simples, que nous avons découvertes, nous pouvons déterminer pour chaque élément de la BRF les produits des paramètres qui lui sont associés dans l'expression de la fonction génératrice de la base de SU(n), et par suite, cette dernière fonction se calcule aisément.

Les expressions des scalaires élémentaires du produit direct de p représentations et leur développement sur le produit de ces représentations se trouvent considérablement facilités en utilisant la RB. Nous montrons que le calcul de la fonction génératrice des coefficients de couplage s'effectue aisément en utilisant ces expressions et les règles (a) et (b).

Les fonctions génératrices ont des expressions longues pour $n > 3$. Nous avons réussi à surmonter cette difficulté en calculant la fonction génératrice des facteurs isoscalaires. Ainsi nous pouvons calculer les facteurs isoscalaires et par suite les coefficients des couplages.

Nous avons montré comment par notre méthode nous pouvons calculer les éléments de la représentation irréductible du produit direct de N représentations ($N = p - 1$). Nous avons retrouvé dans le cas de SU(2) les résultats de Schwinger (1965).

L'obtention de la fonction génératrice des facteurs isoscalaires et la facilité du calcul pour aboutir à ce résultat montre la puissance technique de notre approche. De plus, cette fonction donne les expressions algèbriques des facteurs isoscalaires dans le cas général ($n \geqslant 3$). Les resultats du calcul de ces expressions seront publiés prochainement.

Remerciements

Je tiens à remercier le Dr Kibler pour son soutien lors de mon séjour à Lyon et pour ses critiques et ses suggestions qui m'ont beaucoup aidé. Je remercie également le professeur Lambert pour ses encouragements et le professeur Patera, de l'université de Montréal pour ses encouragements et ses suggestions.

Références

Bickerstaff R P, Butler P H, Butts M B, Haase R W et Reid M F 1982 *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 1087
Gazeau J P, Dumont-Lepage M Cl et Ronveaux A 1978 *J. Math. Phys.* **19** 734
Hage Hassan M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 1633
—— 1983a *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** 1835
—— 1983b *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** 2891
Klimyk A U 1967 *Am. Math. Soc. Translation Ser.* **2** 65–75
Louck J D 1970 *Am. J. Phys.* **38** 3
Louck J D et Biedenharn L C 1973 *J. Math. Phys.* **14** 1336
Nagel J G et Moshinsky M 1965 *J. Math. Phys.* **6** 682
Schwinger J 1965 *Quantum Theory of Angular Momentum* ed Biedenharn et Van Dam (New York: Academic) p 229